

1 古代(ギリシャ以前)の幾何学

演習 1.1 円周率 π を半径 r の円の面積 S を使って定義すると、($S = \pi r^2$ であることから、)

$$\pi = \frac{S}{r^2}.$$

よって、直径 9 (ケト) の円の面積 S をアーメスのパピルスの答え 64 として円周率を求めると、

$$(\text{古代エジプトの}) \pi = \frac{64}{(9/2)^2} = 3.16049\dots$$

演習 1.2 正 6 角形の一辺の長さを r とすると、外接円の半径も r .

外接円の円周の長さを L とすると、円周率 $= \frac{L}{2r}$.

正 6 角形の周囲の長さ $6r$ と外接円の円周の長さ L の比が $0;57,36$ 、つまり、

$$\begin{aligned} \frac{6r}{L} &= 0 + \frac{57}{60} + \frac{36}{60^2} \\ &= \frac{57 \times 60 + 36}{3600} = \frac{72}{75} \quad \therefore L = \frac{75}{12}r \end{aligned}$$

であるので、

$$(\text{古代バビロニアの}) \pi = \frac{L}{2r} = \frac{75}{12}r \times \frac{1}{2r} = \frac{75}{24} = 3.125\dots$$

2 ユークリッド幾何学

演習 2.1 弦 AB が大円から切り取る弓形の面積を S とし、黒い月に 2 つ含まれる弓形の 1 つの面積を s とすると、ヒポクラテスの定理より、

$$S : s = 2 : 1$$

である。つまり、 $S = 2s$ 。よって、黒い月の 2 つの弓形を弦 AB の弓形に置き換えることで、黒い月の面積は、三角形 ABC の面積に等しいと分かる。すなわち、求める面積は $\frac{a^2}{2}$ 。

演習 2.2 正多面体の各頂点には、正多角形が 3 つ以上集まっている。

正 3 角形だけの多面体について 一頂点に正 3 角形が...

3 つ集まるとき \Rightarrow 正 4 面体

4 つ集まるとき \Rightarrow 正 8 面体

5 つ集まるとき \Rightarrow 正 20 面体

6 つ集まるとき \Rightarrow 平面となるので、多面体にはならない。

7 つ以上集まるとき \Rightarrow 360° を越えてしまい、やはり多面体にはならない。

正方形だけの多面体について 一頂点に正方形が...

3 つあつまるとき \Rightarrow 立方体

4 つ以上あつまるとき \Rightarrow 360° 以上となり、多面体にはならない。

正 5 角形だけの多面体について 一頂点に正 5 角形が...

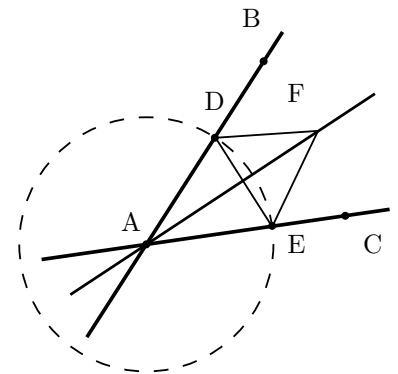
3 つあつまるとき \Rightarrow 正 12 面体

4 つ以上あつまるとき \Rightarrow 360° を越えてしまい、やはり多面体にはならない。

正 6 角形以上について 一頂点に 3 つ以上集まると 360° 以上となり、多面体を形成できない。

演習 2.3 2 直線の交点を A とし、右図のように点 B, 点 C をとる。

- 1) 線分 AB 上に点 D をとる。
- 2) 線分 AC 上に点 E を、線分 AD と線分 AE とが同じ長さとなるようにとる。(命題 3)
- 3) 点 D と点 E とを結ぶ。(公準 1)
- 4) 線分 DE 上に正三角形 DEF を作図する。(命題 1)
- 5) 点 F と点 A とを結ぶ。(公準 1)
- 6) 三角形 ADF と三角形 AEF とは、3 辺が相等しいので、角 DAF と角 EAF とは等しい。(命題 8)



以上により、命題 9 が示された。

演習 2.4 まずは、確認と準備を。

確認

- “平行線” の定義： 両方向にいつまで延しても、互いに交わらない2直線
- 第5公準の原文：「2つの直線と交わっている1つの直線が同じ側に2直角より小さい内角をつくるならば、2直線は限りなく延長されると2直角より小さい角のある側で交わること」
- 「直線 L 上にない一点 p を通り、 L に平行な直線がただ1本引ける。」を命題(*)とする。

点 p から直線 L に垂線 K を引き、垂線の足を h としておく。

主張： 点 p を通り、 K と直角を作る直線 (L' とする) は、 L と平行である。

[証明] L と L' が平行でないと仮定する (背理法)。つまり、 L, L' が交点 (q とする) を持つとする。このとき、3直線 L, L', K が三角形 pqh を囲み、その内角の和が2直角より大きくなるが、三角形 pqh の点 p における外角は直角であるが、任意の三角形の外角は、その対内角のいずれよりも大きいはず (これは (公準5) を使わずに示される [証明しよう]) なので、矛盾。よって、 L と L' とは交点を持たない。つまり、平行である。 □

(公準5) \Rightarrow (*) 上記の主張より、平行線が少なくとも1本はあることが分かっているので、他には、 p を通って L に平行な直線が存在しないことを (公準5) から導こう。

p を通って L' とは異なる任意の直線を l とすると、 l と K とが成す角のどちらかは、直角より小さいはずである。すると、 L, l, K が作る内角が2直角より小さくなるので、(公準5) より l と L とは交点を持つ。つまり、 l は L とは平行ではない。以上より、(*) が示された。

(*) \Rightarrow (公準5) p を通る任意の直線 l で、 L と K と l によって作る内角が2直角より小さいものをとる。すると、 l は L' とは異なる直線となる。このとき、(*) より、平行線は唯1つであることから、 l は L と平行でないはず。つまり、 l は L と交点を持つ。すなわち、(公準5) が示された。

3 射影幾何学

演習 3.1 2つの三角形が空間内の別の平面上にあるとき、以下を確認する必要がある。

主張: 直線 AB と直線 A'B' は交点 P を持つ。(つまり、直線 AB と直線 A'B' とがねじれの位置にない)。

証明) 直線 AA' と直線 BB' とが点 X で交わるという条件から、直線 AA' と直線 BB' とは同一平面内にある。よって、直線 AB と直線 A'B' とがこの平面内で交わる。

辺 BC と辺 B'C' の延長が交点 Q を、辺 CA と辺 C'A' が交点 R を持つことも同様に確かめられる。以上で存在の確かめられた3つの点 P, Q, R は全て、三角形 ABC を含む平面上の点であり、三角形 A'B'C' を含む平面上の点でもある。よって3点は全て、2平面の交線上にある。

演習 3.2 第1項目について。

直線 AB と直線 A'B' とが平行であるとき、直線 QR もこれらに平行であることを示せば、直線 AB と直線 A'B' の“交点”である無限遠点 P を直線 QR も通ると言える。

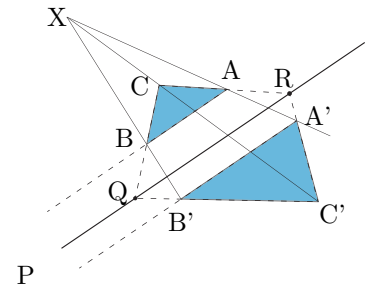
ベクトル

$$\vec{XA} = \vec{a}, \vec{XB} = \vec{b}, \vec{XC} = \vec{c}$$

を考える。辺 AB と A'B' が平行であることから、ある実数 k があって、

$$\vec{XA'} = k\vec{a}, \vec{XB'} = k\vec{b}$$

となる。 $\vec{XC'} = l\vec{c}$ とする ($l \in \mathbb{R}$)。



- 直線 AC と直線 A'C' との交点が点 R であることから、

$$\vec{XR} = s\vec{a} + (1-s)\vec{c} = t(k\vec{a}) + (1-t)(l\vec{c}), \quad [\exists s, t \in \mathbb{R}]$$

となり、 $s = tk, 1-s = (1-t)l$. これを解いて、 $s = \frac{k(1-l)}{k-l}$. よって、

$$\vec{XR} = \frac{k(1-l)}{k-l}\vec{a} + \frac{(k-1)l}{k-l}\vec{c}$$

- 直線 BC と直線 B'C' との交点が点 Q であることから、上記とほぼ同様にして、

$$\vec{XQ} = \frac{k(1-l)}{k-l}\vec{b} + \frac{(k-1)l}{k-l}\vec{c}$$

を得る。

以上より、

$$\vec{QR} = \vec{XR} - \vec{XQ} = \frac{k(1-l)}{k-l}(\vec{a} - \vec{b}).$$

すなわち、直線 QR は直線 AB に平行である。

第2項目について。

この場合は、点 P, Q, R が全て無限遠点となり、よって、全て無限遠直線上にある。つまり、デザルグの定理がやはり成立している。

演習 3.3 演習 3.2 の第 2 項目に同じ。

演習 3.4 射影によって、パスカルの定理の図形をスクリーンに写すとき、直線は直線に移り、定理の結論であるところの「3 点 P, Q, R は一直線上にある」という現象も保存される。よって、円を楕円に移すような射影を行なえば、楕円においてもパスカルの定理は成立することとなる。

演習 3.5 平面 α にデザルグの定理の図形が描かれているとする。示すべきことは、直線 PQ が点 R を通ること。

空間内の点 o からの射影によって、平面 α 上の点を平面 β に移す。ただし、この射影により、直線 PQ が、平面 β の無限遠直線に移されるように光源 o をとる。つまり、光源 o と直線 PQ とを含む平面が平面 β に平行であるようにすればよい。

すると、平面 β 上で点 P, Q は無限遠点なので、平面 β 上で

直線 AB と直線 A'B' とは平行。直線 BC と直線 B'C' とは平行。

よって、直線 CA と直線 C'A' も平行となるので、その交点 R は無限遠点である。従って、無限遠直線 PQ は点 R を通る。

これより、元の平面 α においても直線 PQ は点 R を通る。

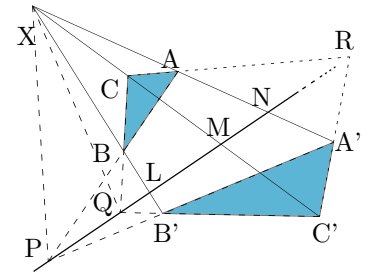
演習 3.6 直線 PQ と直線 XB, XC, XA との交点を L, M, N とする。
直線 PX, PB, PL, PB' から成る直線束に注目すると、その複比は、

$$(PX, PB; PL, PB') = (X, B; L, B') = (X, A; N, A')$$

直線 QX, QB, QL, QB' から成る直線束に注目すると、その複比は、

$$(QX, QB; QL, QB') = (X, B; L, B') = (X, C; M, C')$$

これらより、 $(X, A; N, A') = (X, C; M, C')$ を得る。よって、定理 A より 3 つの直線 CA, MN, C'A' は一点で交わる。つまり、直線 PQ は点 R を通る。

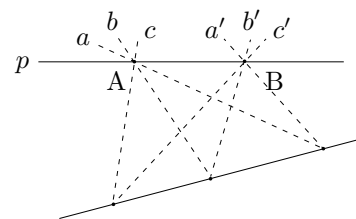


演習 3.7 定理 A の双対は、以下のとおり。

直線 p 上の 2 点 A, B に対し、点 A を通る 4 本の直線 p, a, b, c と点 B を通る 4 本の直線 p, a', b', c' とがあり、

$$(p, a; b, c) = (p, a'; b', c')$$

であるなら、直線 a, a' の交点、直線 b, b' の交点、直線 c, c' の交点の 3 点は一直線上にある。



証明) 直線 a, a' の交点を P, 直線 b, b' の交点を Q, 直線 c, c' の交点を R とする。示すべきことは、直線 PQ が点 R を通ること。

直線 PQ と直線 p との交点を X とし、直線 PQ と直線 c, c' との交点をそれぞれ Y, Y' とすると、条件より、

$$(X, P; Q, Y) = (X, P; Q, Y') \Leftrightarrow \frac{\overline{XQ}}{\overline{XY}} / \frac{\overline{PQ}}{\overline{PY}} = \frac{\overline{XQ}}{\overline{XY'}} / \frac{\overline{PQ}}{\overline{PY'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{PY}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{PY'}}{\overline{XY'}}$$

これより、点 Y と点 Y' は同一の点。

演習 3.8 (1) 無限遠点の γ 座標は 0 なので、直線の式に代入して $A\alpha + B\beta + C \cdot 0 = 0$. 整理して $B\beta = -A\alpha \cdots (*)$. $B \neq 0$ とすると、求める無限遠点の座標は、

$$[\alpha, \beta, 0] = [B\alpha, B\beta, 0] = [B\alpha, -A\alpha, 0] = [B, -A, 0].$$

これは、 $B = 0$ の場合にも成立する。

(2) 無限遠直線とは、無限遠点 $[a, b, 0]$ 全体の集合。よって、 $\gamma = 0$ が無限遠直線を表す。

(3) 相異なる 2 直線 l, l'

$$l : A\alpha + B\beta + C\gamma = 0 \quad \cdots (1)$$

$$l' : A'\alpha + B'\beta + C'\gamma = 0 \quad \cdots (2)$$

の交点を求める。

- $C'(1) - C(2)$ をして、

$$(AC' - A'C)\alpha + (BC' - B'C)\beta = 0 \quad \therefore (BC' - B'C)\beta = -(AC' - A'C)\alpha$$

- $B'(1) - B(2)$ をして、

$$(AB' - A'B)\alpha + (CB' - C'B)\gamma = 0 \quad \therefore (CB' - C'B)\gamma = -(AB' - A'B)\alpha$$

以上より、求める交点の座標は、

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta, \gamma] &= [(BC' - B'C)\alpha, (BC' - B'C)\beta, (BC' - B'C)\gamma] \\ &= [(BC' - B'C)\alpha, -(AC' - A'C)\alpha, (AB' - A'B)\alpha] \\ &= [BC' - B'C, CA' - C'A, AB' - A'B]. \end{aligned}$$

この結果より、 l, l' が平行 (つまり、 $A = A', B = B'$) の場合の交点が、

$$[BC' - BC, CA - C'A, AB - AB] = [B(C' - C), -A(C' - C), 0] = [B, -A, 0]$$

であることや、 l' が無限遠直線である (つまり、 $A' = B' = 0$) ときの交点が、

$$[BC', -C'A, 0] = [B, -A, 0]$$

であることが得られる。

別解 射影平面上の直線と 3 次元空間内の原点を通る平面とが同じ式で表されることから、2 直線 l, l' の交点に対応するベクトルは、2 直線と同じ式である 2 平面 (P, P' とする) の交線上のベクトルである。

平面 P, P' の法線ベクトルとして $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{pmatrix}$ がとれ、2 平面の交線上のベクトルは、これら法線ベクトルの両方に垂直であることから、外積

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BC' - B'C \\ CA' - C'A \\ AB' - A'B \end{pmatrix}$$

で得られる。以上より、求める交点の射影座標は $[BC' - B'C, CA' - C'A, AB' - A'B]$ 。

演習 3.9 射影平面上の直線上の 4 点 A, B, C, D について, 点 A, B, C, D の射影座標に対応するベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ として,

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, \quad \mathbf{d} = \lambda' \mathbf{a} + \mu' \mathbf{b}$$

であるとすると, 複比 $(A, B; C, D)$ は以下の通り.

$$(A, B; C, D) = \frac{\mu}{\lambda} / \frac{\mu'}{\lambda'}.$$

A, B, C, D の射影座標を全て先とは別のものに取り換え, これに伴い対応するベクトルたちが,

$$k\mathbf{a}, \quad l\mathbf{b}, \quad s\mathbf{c}, \quad t\mathbf{d}$$

となったとする [k, l, s, t はいずれも 0 でない実数]. このとき,

$$\begin{aligned} s\mathbf{c} &= s(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) = \frac{s}{k} \lambda (k\mathbf{a}) + \frac{s}{l} \mu (l\mathbf{b}), \\ t\mathbf{d} &= t(\lambda' \mathbf{a} + \mu' \mathbf{b}) = \frac{t}{k} \lambda' (k\mathbf{a}) + \frac{t}{l} \mu' (l\mathbf{b}) \end{aligned}$$

であるので, これらのデータから複比 $(A, B; C, D)$ を求めると,

$$(A, B; C, D) = \frac{\frac{s}{l} \mu}{\frac{s}{k} \lambda} / \frac{\frac{t}{l} \mu'}{\frac{t}{k} \lambda'} = \frac{\mu}{\lambda} / \frac{\mu'}{\lambda'}.$$

演習 3.10 線形代数を使わずに. 射影平面上の点 $[x_1, x_2, x_3]$ が射影変換

$$\begin{cases} X_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ X_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ X_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

によって, 点 $[X_1, X_2, X_3]$ に移るとする. このとき, 点 $[x_1, x_2, x_3]$ を $[kx_1, kx_2, kx_3]$ と表記すると ($k \neq 0$)、上の射影変換によって、

$$\begin{aligned} a_{11}kx_1 + a_{12}kx_2 + a_{13}kx_3 &= kX_1 \\ a_{21}kx_1 + a_{22}kx_2 + a_{23}kx_3 &= kX_2 \\ a_{31}kx_1 + a_{32}kx_2 + a_{33}kx_3 &= kX_3 \end{aligned}$$

と移されるが, $[kX_1, kX_2, kX_3] = [X_1, X_2, X_3]$ である。

線形代数を使って. 射影平面上の点 $[x_1, x_2, x_3]$ に対応するベクトルを \mathbf{x} とする.

- 3 次正則行列 A で定まる射影変換により, ベクトル \mathbf{x} は $A\mathbf{x}$ に移される.
- 点 $[x_1, x_2, x_3]$ を $[kx_1, kx_2, kx_3]$ へと表し方を変えると ($k \neq 0$), 対応するベクトルは $k\mathbf{x}$ となり、上の射影変換によって $A(k\mathbf{x}) = kA\mathbf{x}$ へと移される.

ベクトル $A\mathbf{x}$ に対応する射影平面上の点と, $kA\mathbf{x}$ に対応する射影平面上の点とは同じである.

演習 3.11 3 次正則行列 P が表す射影変換によって点 $[x_1, x_2, x_3]$ が移される点を $[y_1, y_2, y_3]$ とすると, それぞ

れに対応するベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ を考えて,

$$\mathbf{y} = P\mathbf{x}.$$

行列 P は正則なので、逆行列 P^{-1} が存在する。これを先の式の両辺に左からかけて、

$$P^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{x}. \quad \dots(1)$$

$[x_1, x_2, x_3]$ が固有 2 次曲線 ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} = 0$ 上の任意の点とする (A は正則対称行列). 式 (1) を代入して、以下を得る.

$${}^t(P^{-1}\mathbf{y})A(P^{-1}\mathbf{y}) = {}^t\mathbf{y}({}^tP^{-1}AP^{-1})\mathbf{y} = 0$$

行列 ${}^tP^{-1}AP^{-1}$ は対称な正則行列である¹ ので、 $[y_1, y_2, y_3]$ も固有 2 次曲線上の点。

演習 3.12 任意の固有 2 次曲線 ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} = 0$ をとる (つまり、 A は 3 次正則対称行列). 適当な射影変換で、この 2 次曲線が

$${}^t\mathbf{x} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = 0$$

の形になることを示すのだが、前問の考察より、行列 A が、ある正則行列 B による tBAB という操作を繰り返すことで、 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の形にまでなるということを示せばよい。

以下の線形代数学の知識を利用する。

- (i) 実対称行列は直交行列によって必ず対角化可能であり、固有値は全て実数。
- (ii) n 次正則行列の階数は n 。
- (iii) 2 次形式 ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ が正定値 (つまり、任意のベクトル \mathbf{x} について ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} > 0$ であること) と、 A の固有値が全て正の数であることが同値. 同様に “ ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ が負定値” \Leftrightarrow “ A の固有値が全て負”。

(i) より、ある直交行列 P (つまり、 $P^{-1} = {}^tP$) があって、

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}].$$

(ii) より、 $\text{rank}(A) = \text{rank}(P^{-1}AP) = 3$ であるはず。よって、固有値は全て 0 ではない

(iii) と固有値が全て 0 でないことより、 ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} = 0$ を満す \mathbf{x} が存在するために、 A は正負両方の固有値を持つはずである。さらに、

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 < 0$$

であるとしてよい²。

そこで、正則行列 $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_3}} \end{pmatrix}$ によって、

$${}^tQ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。

¹行列 ${}^tP^{-1}AP^{-1}$ の正則性は、 P^{-1} , A がどちらも正則なことから。対称性は ${}^t({}^tP^{-1}AP^{-1}) = {}^tP^{-1}{}^tA{}^tP^{-1} = {}^tP^{-1}AP^{-1}$ より。
²必要なら A を $-A$ に取り換えたり、 P の列ベクトルの順番を換えるなどして。

4 非ユークリッド幾何学

演習 4.1 直線 l と l 上にない点 P をとる。点 P より l に垂線が引ける（「原論 第 I 巻」 命題 12）。

点 P を通る直線で、この垂線と直角を成すものがある（命題 11）。それを l' とする。

l' が l と交点 (Q とする) を持つとすると、先の垂線の足を H として、三角形 PQH が作られ、この三角形の点 P における外角は直角である。これは、任意の三角形の外角がその対内角のいずれよりも大きいことに矛盾する（命題 16）。よって、 l と l' は平行である。

(注意：以上に使われている「原論 第 I 巻」の命題たちは全て、第 5 公準を使わず証明されるものばかり。)

演習 4.2 求める直線の式を $|z - a| = r$ とする ($a, r \in \mathbb{R}, r > 0$)。点 i を通ることから、

$$|i - a| = r \Leftrightarrow r = \sqrt{1 + a^2}.$$

点 $1 + 2i$ を通るので、

$$\begin{aligned} |1 + 2i - a| &= \sqrt{1 + a^2} \\ (1 + 2i - a)(1 - 2i - a) &= 1 + a^2 \\ 5 - 2a + a^2 &= 1 + a^2 \quad \therefore a = 2. \text{ よって, } r = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

以上より、求める直線の式は $|z - 2| = \sqrt{5}$ 。

この直線と平行 (つまり、交点を持たない) 直線で点 $3i$ を通るもの¹ は、例えば、 $|z - 1| = \sqrt{10}$ や $|z - 2| = \sqrt{13}$ 。さらには、 $1 \leq a \leq 2$ である直線 $|z - a| = \sqrt{a^2 + 3^2}$ たちも先の直線とは平行。

演習 4.3 H^+ 上の任意の 1 次分数変換には逆変換が存在し、それもまた H^+ 上の 1 次分数変換であることから、命題の証明には以下の主張を示せば十分である。

主張

H^+ 上の任意の直線 l とその上の点 z に対して、 l を虚軸に、しかも点 z を点 i に移す H^+ 上の 1 次分数変換が存在する。

H^+ 上の任意の直線 $l: |z - a| = r$, ($a, r \in \mathbb{R}, r > 0$) とその上の点 z に対して、主張にある H^+ 上の 1 次分数変換を以下で構成する。

H^+ 上の 1 次分数変換には様々なものがあるが、その中に以下のタイプのものがある。

(A) $\phi(z) = z + b \left(= \frac{1z + b}{0z + 1} \right)$: 実軸に水平に b だけ移動。

(B) $\psi(z) = az \left(= \frac{az + 0}{0z + 1} \right)$, [$a \neq 0, 1$]: 原点中心に拡大 [$1 < a$], または縮小 [$0 < a < 1$].

そこで、直線 l にタイプ (A) の変換 $\phi_1(z) = z - a$ を施して $|z| = r$ に移し、続いてタイプ (B) の変換 $\phi_2(z) = \frac{1}{r}z$ を施して $|z| = 1$ に移す。さらに変換

$$\phi_3(z) = \frac{z - 1}{z + 1}$$

を施すと $|z| = 1$ は虚軸に移される。ここまでで、直線 l は虚軸に移されたが、 l 上の点 z が虚軸上の点 ki , ($k > 0$) に移っているとす。そこで、最後にタイプ (B) の変換 $\phi_4(z) = \frac{1}{k}z$ により点 ki は点 i に移す (虚軸は虚軸に移る)。

以上をまとめると、直線 l は H^+ 上の 1 次分数変換 $\phi = \phi_4 \circ \phi_3 \circ \phi_2 \circ \phi_1$ により虚軸へ移され、 l 上の点 z は点 i に移されることが分った。

¹直線 $|z - a| = r$ が点 $3i$ を通るとき、実数 a を決めると $r = \sqrt{a^2 + 3^2}$ と定まることに注意。

演習 4.4 H^+ の直線上の 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 と 1 次分数変換 $w = \frac{az+b}{cz+d}$ に対し、

$$w_i := \frac{az_i + b}{cz_i + d}, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

とする。このとき、 $[w_1, w_2; w_3, w_4] = [z_1, z_2; z_3, z_4]$ を示す。

先に、 $w_1 - w_3$ を計算しておく、

$$\begin{aligned} w_1 - w_3 &= \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \frac{az_3 + b}{cz_3 + d} \\ &= \frac{(az_1 + b)(cz_3 + d) - (az_3 + b)(cz_1 + d)}{(cz_1 + d)(cz_3 + d)} \\ &= (ad - bc) \frac{(z_1 - z_3)}{(cz_1 + d)(cz_3 + d)} \end{aligned}$$

$w_2 - w_4, w_2 - w_3, w_1 - w_4$ についても同様なので、

$$\begin{aligned} [w_1, w_2; w_3, w_4] &= \frac{(w_1 - w_3)(w_2 - w_4)}{(w_2 - w_3)(w_1 - w_4)} \\ &= \frac{(ad - bc) \frac{(z_1 - z_3)}{(cz_1 + d)(cz_3 + d)} (ad - bc) \frac{(z_2 - z_4)}{(cz_2 + d)(cz_4 + d)}}{(ad - bc) \frac{(z_2 - z_3)}{(cz_2 + d)(cz_3 + d)} (ad - bc) \frac{(z_1 - z_4)}{(cz_1 + d)(cz_4 + d)}} = [z_1, z_2; z_3, z_4]. \end{aligned}$$

演習 4.5 H^+ 上の 1 次分数変換で、複比の値は不変であり、任意の直線を虚軸に移せることから、虚軸上の任意の 2 点 z, z' に関して示せば十分。 $z = ki, z' = k'i$ ($k > 0, k' > 0$) とすると、

$$[ki, k'i; 0, \infty] = \frac{k}{k'} > 0.$$

演習 4.6 • 性質 i) について。

(\Rightarrow) $d(z, z') = 0$ より、

$$\frac{(z - x_0)(z' - x_1)}{(z' - x_0)(z - x_1)} = 1 \Rightarrow (z - x_0)(z' - x_1) = (z' - x_0)(z - x_1) \Rightarrow (x_0 - x_1)(z - z') = 0.$$

$x_0 - x_1 \neq 0$ は常に成立するので、 $z = z'$ 。

(\Leftarrow) $z = z'$ より、

$$[z, z'; x_0, x_1] = [z, z; x_0, x_1] = \frac{(z - x_0)(z - x_1)}{(z - x_0)(z - x_1)} = 1. \quad \therefore d(z, z') = 0.$$

• 性質 ii) について。 複比の定義より、 $[z', z; x_0, x_1]$ の逆数が $[z, z'; x_0, x_1]$ となることに注意して、

$$d(z', z) = |\log[z', z; x_0, x_1]| = |-\log[z, z'; x_0, x_1]| = |\log[z, z'; x_0, x_1]| = d(z, z').$$

• 性質 iii) について。 直線上に順に並ぶ z_1, z_2, z_3 のうち 2 点が一致する場合や、3 点とも一致する場合に

$$d(z_1, z_3) = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$$

の成立することは、先の性質 i) より従う。

以下では 3 点は全て異なる点とする。

$$\text{右辺} = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) = |\log[z_1, z_2; x_0, x_1]| + |\log[z_2, z_3; x_0, x_1]| \quad \cdots (*)$$

主張. ここに並んだ2つの絶対値の中の \log の値の正負は一致する.

\therefore 3点が乗る直線を l とする. 直線 l 上の動点 w, w' を考え, w が z_1 から z_2 に連続的に移動する間に, w' が z_2 から z_3 に連続的に移動するとする. また, 2点 w, w' が一致してしまう瞬間は無いとしてよい (z_1, z_2, z_3 の順で並んでいるので). このとき, 距離 $d(w, w')$ は w, w' に関する連続関数であり, 決して0にはならない. つまり, 複比 $[w, w'; x_0, x_1]$ は w, w' が変化する間, 決して1にはなれない. 従って, $[z_1, z_2; x_0, x_1], [z_2, z_3; x_0, x_1]$ の2つの値は, 共に1より小さいか, 共に1より大きいかのいずれか. \square

この主張より, 絶対値を1つに融合しても等号が成立して,

$$\begin{aligned} (*) &= |\log[z_1, z_2; x_0, x_1] + \log[z_2, z_3; x_0, x_1]| \\ &= |\log[z_1, z_2; x_0, x_1][z_2, z_3; x_0, x_1]| \\ &= \left| \log \frac{(z_1 - x_0)(z_2 - x_1)(z_2 - x_0)(z_3 - x_1)}{(z_2 - x_0)(z_1 - x_1)(z_3 - x_0)(z_2 - x_1)} \right| \\ &= \left| \log \frac{(z_1 - x_0)(z_3 - x_1)}{(z_1 - x_1)(z_3 - x_0)} \right| = d(z_1, z_3). \end{aligned}$$

- 性質 iv) について. H^+ 上の1次分数変換で, 複比の値は不変であり, 任意の直線を虚軸に移せることから, 虚軸上の任意の2点 z, z' に関して示せば十分.

$z = ki, z' = k'i, (0 < k' < k)$ として, z' が限りなく実軸に近づくとき $k' \rightarrow 0$ であり,

$$\lim_{k' \rightarrow 0} d(z, z') = \lim_{k' \rightarrow 0} |\log[ki, k'i; 0, \infty]| = \lim_{k' \rightarrow 0} \left| \log \frac{k}{k'} \right| = +\infty.$$

演習 4.7 (1) $d(i, 2i)$ を求める.

2点 $i, 2i$ を通る直線は虚軸 ($\operatorname{Re}(z) = 0$) である.

$[i, 2i; 0, \infty] = \frac{i-0}{2i-0} = \frac{1}{2}$. よって,

$$d(i, 2i) = |\log[i, 2i; 0, \infty]| = \left| \log \frac{1}{2} \right| = \log 2.$$

(2) $d(1+i, 1+2i)$ を求める.

ここは, 1次分数変換を利用する.

変換 $\psi(z) = z + 1$ を考えると, $\psi(i) = 1 + i, \psi(2i) = 1 + 2i$.

1次分数変換は等長変換なので,

$$d(1+i, 1+2i) = d(\psi(i), \psi(2i)) = d(i, 2i) = \log 2.$$

(3) $d(i, 1+i)$ を求める. 2点 $i, 1+i$ を通る直線は $|z - \frac{1}{2}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. (ユークリッド幾何においては, 中心 $\frac{1}{2}$, 半径 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ の半円.) この直線と実軸との交点は $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

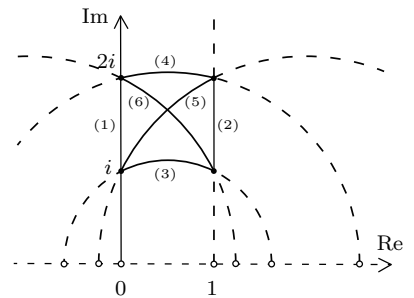
$$[i, 1+i; \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}] = \frac{(i - \frac{1-\sqrt{5}}{2})(1+i - \frac{1+\sqrt{5}}{2})}{(1+i - \frac{1-\sqrt{5}}{2})(i - \frac{1+\sqrt{5}}{2})} = \dots = \frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}$$

より, $d(i, 1+i) = \left| \log \frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} \right| = \log \frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}$.

(4) $d(2i, 1+2i)$ を求める. 2点 $2i, 1+2i$ を通る直線は $|z - \frac{1}{2}| = \frac{\sqrt{17}}{2}$. 実軸との交点は $\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

$$[2i, 1+2i; \frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2}] = \dots = \frac{17 - \sqrt{17}}{17 + \sqrt{17}}$$

より, $d(2i, 1+2i) = \left| \log \frac{17-\sqrt{17}}{17+\sqrt{17}} \right| = \log \frac{17+\sqrt{17}}{17-\sqrt{17}}$.



(5) $d(i, 1+2i)$ を求める. 2点 $i, 1+2i$ を通る直線は $|z-2| = \sqrt{5}$. これと実軸との交点は $2 \pm \sqrt{5}$.

$$[i, 1+2i; 2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}] = \frac{(i-2+\sqrt{5})(1+2i-2-\sqrt{5})}{(1+2i-2+\sqrt{5})(i-2-\sqrt{5})} = \dots = \frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$$

より、 $d(i, 1+2i) = \left| \log \frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} \right| = \log \frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}$. [(3) の線分と同じ長さ!!]

(6) $d(2i, 1+i)$ を求める. 図より, (5) の線分と同じ長さであると予測されるので, 2点 $2i, 1+i$ を 2点 $i, 1+2i$ へ移す 1 次分数変換を (場当たりに) 作ることによって, 2つ長さが等しいことを示す².

• まず, 変換 $\phi_1(z) = \frac{1}{2}z$ によって,

$$\phi_1(2i) = i, \quad \phi_1(1+i) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}.$$

• あとは, i を変えずに $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ を $1+2i$ に移す変換があればよい. 点 i を動かさない変換が $\phi(z) = \frac{z+b}{-bz+1}$, ($b \in \mathbb{R}$) の形に表されることは容易に求められる. さらに, この変換が $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ を $1+2i$ に移すように b を定めると $b=1$ と求まる. つまり, $\phi_2(z) = \frac{z+1}{-z+1}$ とすれば,

$$\phi_2(i) = i, \quad \phi_2\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) = 1+2i.$$

以上より, 1 次分数変換

$$\phi(z) = \phi_2 \circ \phi_1(z) = \frac{\frac{1}{2}z+1}{-\frac{1}{2}z+1} = \frac{z+2}{-z+2}$$

を考えると,

$$d(2i, 1+i) = d(\phi(2i), \phi(1+i)) = d(i, 1+2i) = \log \frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}.$$

演習 4.8 H^+ 上に任意に 2 点 z_0, z_1 をとる. 点 z_0 を中心とし, 半径 $d = d(z_0, z_1)$ とする双曲幾何の円 (ここでは “双曲円” と呼ぶことにする) とは, 点 z_0 から双曲幾何の距離で d 離れた点たちの集合が成す図形. この点集合がユークリッド幾何の意味での円 (こちらは “ユ円” と呼ぶ) でもあること, つまり, ある点からユークリッド幾何の意味で等距離にある点の集合でもあることを示す.

H^+ 上の 1 次分数変換 $w = z+b$ によって, H^+ 上の 2 点間の距離は, 双曲幾何の意味でもユークリッド幾何の意味でも変化しない. よって, $z_0 = ki$, ($k > 0$) の場合だけ示せば十分である.

- 双曲円 O を点 ki 中心, 半径 d であるとして, O と虚軸との交点を ai, bi とする ($b < k < a$).
- ここで, 2 点 ai, bi を通り, 中心が虚軸上にあるユ円を考える³. これを \hat{O} とする. \hat{O} の中心は, 2 点 ai, bi のユークリッド幾何の意味での中点 $\frac{a+b}{2}i$ であり, 半径は, 2 点 ai, bi のユークリッド幾何の意味での距離の半分 $\frac{a-b}{2}$ である. つまり, \hat{O} を表す式は $|z - \frac{a+b}{2}i| = \frac{a-b}{2}$.
- a, b を k で表す.

$$d = d(ki, ai) = \log \frac{a}{k} \Leftrightarrow e^d = \frac{a}{k} \Leftrightarrow a = ke^d.$$

同様にして, $b = ke^{-d}$. これらより,

$$\frac{a+b}{2} = k \frac{e^d + e^{-d}}{2} = k \cosh(d), \quad \frac{a-b}{2} = k \frac{e^d - e^{-d}}{2} = k \sinh(d).$$

以上より, ユ円 \hat{O} を表す式は,

$$|z - ki \cosh(d)| = k \sinh(d) \quad \dots (\star)$$

² “反転” を使うという手もある.

³ 双曲円 O は虚軸に対して対称であるはずなので, これがユ円でもあるなら, ユ円としての中心も虚軸上にあるはず.

円 \widehat{O} が双曲円 O と一致することを示す. すなわち, \widehat{O} 上の任意の点 w と点 ki との双曲幾何での距離が常に d であることを示せばよい. そのために, 点 ki を動かさない 1 次分数変換 $\phi(z)$ で, $\phi(w) = ke^{di}$ であるものが存在することを示すことにする. (すると, $d(w, ki) = d(ke^{di}, ki) = d$ である.)

- 点 w は \widehat{O} 上の点なので, $(*)$ 式を満す. これより,

$$\begin{aligned} |w - ki \cosh(d)|^2 &= k^2 \sinh^2(d) \\ (w - ki \cosh(d))(\overline{w - ki \cosh(d)}) &= k^2 \sinh^2(d) \\ |w|^2 - 2k \operatorname{Im}(w) \cosh(d) + k^2 &= 0 \quad \dots [\heartsuit] \end{aligned}$$

[最後に $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ を使った.]

- 点 ki を動かさない 1 次分数変換は $\phi(z) = \frac{z - kt}{\frac{t}{k}z + 1}$, ($t \in \mathbb{R}$) という形⁴ である.

$$\phi(w) = \frac{w - kt}{\frac{t}{k}w + 1} = ke^{di}$$

を成立させる実数 t が存在することを示す. t について解いて,

$$t = \frac{w - ke^{di}}{e^{di}w + k} = \frac{-e^d}{|e^{di}w + k|^2} (|w|^2 i - e^{-d}kw + ke^d \bar{w} + k^2 i).$$

これが実数であればよい. つまり, 右辺の虚数部分が 0 であればよいが, 実際,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(|w|^2 i - e^{-d}kw + ke^d \bar{w} + k^2 i) &= |w|^2 - e^{-d}k \operatorname{Im}(w) + ke^d \operatorname{Im}(\bar{w}) + k^2 \\ &= |w|^2 - k \operatorname{Im}(w)(e^{-d} + e^d) + k^2 \\ &= |w|^2 - 2k \operatorname{Im}(w) \cosh(d) + k^2 = 0 \quad ([\heartsuit] \text{ より}). \end{aligned}$$

よって, 目的の変換が存在する.

演習 4.9 求める円の半径を r とすると, 求める円の式は,

$$|z - i \cosh(r)| = \sinh(r).$$

上の演習の結果より, $r = d(i, 1 + 2i) = \log \frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}$ であり,

$$\begin{aligned} \cosh(r) &= \frac{1}{2} \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} + \frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} \right) = \frac{1}{2} \frac{(5 + \sqrt{5})^2 + (5 - \sqrt{5})^2}{25 - 5} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2} \\ \sinh(r) &= \frac{1}{2} \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} - \frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} \right) = \frac{1}{2} \frac{(5 + \sqrt{5})^2 - (5 - \sqrt{5})^2}{25 - 5} = \frac{20\sqrt{5}}{40} = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

より, 求める式は,

$$\left| z - \frac{3i}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

演習 4.10 1 次分数変換がユークリッドの意味での角の大きさを保存することを確認する. 以下で, “角の大きさ” とは全てユークリッド幾何の意味でのものとし, 図形の呼び名も, 断らないかぎりユークリッド幾何でのものを使う.

任意の 1 次分数変換 (H^+ 上とは限らない) は基本的な 3 種の 1 次分数変換,

$$w = \alpha z \quad \dots (1), \quad w = z + \beta \quad \dots (2), \quad w = \frac{1}{z} \quad \dots (3), \quad [\alpha, \beta \in \mathbb{C}]$$

⁴方程式 $\frac{a(ki)+b}{c(ki)+d} = ki$ を $ad - bc > 0$ である a, b, c, d について解けばよい.

たちの合成として得られる⁵. これら3種の1次分数変換で, 角の大きさが変わらないことを示せばよい.

(1) や (2) のタイプの変換で角の大きさが変化しないのは明らか. 残る (3) $w = \frac{1}{z}$ について.

交差する任意の2つの双曲幾何の直線は, タイプ (1), (2) の1次分数変換を施すことで, 一方を

$$|z| = 1 \text{ (単位円)} \quad \text{か} \quad \operatorname{Re} z = 0 \text{ (虚軸)}$$

に移すことができる. もう一方は,

$$|z - c| = r, \quad [c, r \in \mathbb{R}, |c| < 1 + r]$$

であるとする. 以下で, 一方が $|z| = 1$, もう一方の円が原点を通らない ($|c| \neq r$) 場合だけを扱う.

i) 変換 $w = \frac{1}{z}$ について.

- 単位円 $|z| = 1$ は変換 $w = \frac{1}{z}$ で自分自身に移る.
- 円 $|z - c| = r$ の式の両辺を2乗して, 左辺を展開すると,

$$\begin{aligned} (z - c)(\bar{z} - c) &= r^2 \\ z\bar{z} - c(z + \bar{z}) + c^2 - r^2 &= 0 \quad \dots[*]. \end{aligned}$$

この式に $z = \frac{1}{w}$ を代入して, w の式に変換し整理すると,

$$w\bar{w} - \frac{c}{c^2 - r^2}(w + \bar{w}) + \frac{1}{c^2 - r^2} = 0$$

これより, 円 $|z - c| = r$ は変換 $w = \frac{1}{z}$ によって, 円

$$\left| w - \frac{c}{c^2 - r^2} \right| = \frac{r}{r^2 - c^2}$$

に移される.

- この変換で, H^+ と H^- とが入れ換り, $|z| = 1$ の内部と外部とが入れ換っている.

ii) 2円 $|z| = 1, |z - c| = r$ の交点について.

- 2円の H^+ 上の交点を γ とすると, $\gamma = e^{i\theta}$, ($0 < \theta < \pi$) かつ [*] 式も満すので,

$$1 - c(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + c^2 - r^2 = 0 \iff c \cos \theta = \frac{1}{2}(1 + c^2 - r^2) \quad \dots[**].$$

- 2円の (H^- 上にある) もうひとつの交点は $\bar{\gamma} = e^{-i\theta}$ であり, 変換 $w = \frac{1}{z}$ により, γ と $\bar{\gamma}$ とが入れ替わる.

iii) 2円の交点 γ における接線について.

- 単位円と円 $|z - c| = r$ の接点 γ における接線の実軸との成す角をそれぞれ ω_0, ω_1 とすると,

$$\tan \omega_0 = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad \tan \omega_1 = -\frac{\cos \theta - c}{\sin \theta}.$$

よって, [**] も利用して,

$$\tan(\omega_0 - \omega_1) = \frac{-\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta - c}{\sin \theta}}{1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\cos \theta - c}{\sin \theta}} = \frac{-c \sin \theta}{1 - c \cos \theta} = \frac{-2c \sin \theta}{1 - c^2 + r^2}.$$

⁵実際に, $a \neq 0$ ならば, 変換 $w = \frac{az + b}{cz + d}$ は,

$$w_1 = \frac{a^2}{ad - bc} z, \quad w_2 = w_1 + \frac{ab}{ad - bc} z, \quad w_3 = \frac{1}{w_2}, \quad w_4 = w_3 + \frac{c}{a}, \quad w = \frac{1}{w_4}$$

を合成することで得られる. $a = 0$ の場合はもっと簡単なので各自でどうぞ.

- 単位円と円 $\left|w - \frac{c}{c^2 - r^2}\right| = \frac{r}{r^2 - c^2}$ の接点 $\bar{\gamma}$ における接線の実軸との成す角をそれぞれ ω'_0, ω_2 とすると, $\omega'_0 = -\omega_0$ であり,

$$\tan \omega'_0 = \tan(-\omega_0) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad \tan \omega_2 = \frac{\cos \theta - \frac{c}{c^2 - r^2}}{\sin \theta}.$$

よって, $[**]$ も利用して,

$$\tan(\omega'_0 - \omega_2) = \frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta - \frac{c}{c^2 - r^2}}{\sin \theta}}{1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\cos \theta - \frac{c}{c^2 - r^2}}{\sin \theta}} = \frac{c \sin \theta}{c^2 - r^2 - c \cos \theta} = \frac{-2c \sin \theta}{1 - c^2 + r^2}.$$

以上より、変換後の2つの円の成す角の大きさは元の大きさと変わらない。

演習 4.11 サッケーリ・ルジャンドルの定理より、三角形の内角の和がちょうど π にはならないことを示せば十分。一般の三角形についての公式 (III) より

$$\begin{aligned} \cosh a &= \frac{\cos B \cos C + \cos A}{\sin B \sin C} \\ &= \frac{\cos B \cos C - \cos(B+C)}{\sin B \sin C} + \frac{\cos(B+C) + \cos A}{\sin B \sin C} \\ &= \frac{\cos B \cos C - (\cos B \cos C - \sin B \sin C)}{\sin B \sin C} + \frac{\cos(B+C) + \cos A}{\sin B \sin C} \\ &= 1 + \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B+C) \cos \frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B \sin C} \end{aligned}$$

$0 < a$ なので, $1 < \cosh a$ である。よって, $\cos \frac{1}{2}(A+B+C) \neq 0$ である。つまり, $A+B+C \neq \pi$.